

KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

METODE OPTIMIZACIJE I NJIHOVA PRIMJENA U GRAĐEVINARSTVU

1. Operaciona istraživanja

2. Linearno programiranje

1. grafička metoda

2. simpleks metoda (*u narednom predavanju*)

3. transportni problemi- (*u narednom predavanju*)

predavanja koncipirana uglavnom na osnovu knjige:

Ž. Praščević, N. Praščević- Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Beograd 2009

Operaciona istraživanja

- *Operaciona istraživanja obuhvataju primjenu naučnih metoda za rješavanje kompleksnih problema koji nastaju u upravljanju velikim sistemima u privredi, poslovnim državnim, odbrambenim i drugim institucijama (Def. Britanskog udruženja za operaciona istraživanja)*
- **cilj primjene** = povećanje efikasnosti poslovanja sistema
- Karakteristike operacionih istraživanja:
 - sistemski pristup (menadžmentu i poslovnom sistemu)
 - primjena u organizacionim (operativnim) sistemima (istraživanje operacija cijele organizacije)
 - primjena naučnih metoda i tehnika u izučavanju funkcionisanja sistema i priprema odluka
 - formulisanje modela i iznalaženje optimalnog ili zadovoljavajućeg rješenja
 - planiranje i upotreba eksperimentalnih operacija koje daju uvid u ponašanje stvarnih operacija
 - kompleksni radni timovi (poznavaoци operacionih istraživanja i eksperti za tehničke, tehnološke, ekonomske, pravne i dr. probleme)

Nastanak i razvoj operacionih istraživanja

- prvobitno rješavani problemi uspješnosti vojnih operacija
- na početku i tokom Prvog svjetskog rata u Velikoj Britaniji:
 - oformljen tim za rješavanje problema najefikasnijeg rasporeda protivavionske artiljerije
 - problem efikasnosti bombardovanja i zaštite brodskih konvoja
- na početku i tokom Drugog svjetskog rata
 - razvoj novih metoda taktičkih operacija (za otkrivanje neprijateljskih aviona radarom)
 - 1941. g. Bleket (fizičar- kasnije dobitnik Nobelove nagrade)- definisao cilj operacionih istraživanja: „da pomognu u nalaženju mogućnosti za poboljšanje ratnih operacija“
 - 1942. g. formirana u Američkoj mornarici Grupa za operaciona istraživanja, zatim u Kanadskom vazduhoplovstvu itd.
 - 1939. Kantorovič (RU- kasnije 1975- dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju) prvi put formulisao neke značajne probleme proizvodnje kao zadatke linearnog programiranja i predložio metodu rješavajućih koeficijenata
 - 1949 Dancin (SAD) formulisao Simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja.
- nakon rata primjena u industriji

Faze rešavanja problema u operacionim istraživanjima

1. formulacija problema

- opisuju se ciljevi istraživanja,
- formulišu se hipoteze,
- identifikuju se alternativne odluke,
- sagledavaju se ograničenja, mogućnosti i zahtjevi sistema

2. izrada matematičkog modela-definisanje zadatka matematičkog programiranja=matematički program (nelinearni ili linearni)

- definisanje funkcije cilja (cilj koji se želi postići funkcionisanjem sistema): $z = \max(\min)f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ ili se ova funkcija može sastojati od više funkcija kriterijuma (višekriterijumska optimizacija)
- uslovi ograničenja=matematičke relacije između promjenljivih x_j koje zavise od tehnoloških zahtjeva, raspoloživih resursa, radnog prostora i sl.: $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \leq 0$, $i=1, 2, \dots, m$ ili jednačine $h_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = 0$, $i=1, 2, \dots, r$
- gdje su:
 - $x_1, x_2, \dots, x_n$ - promjenljive odlučivanja (zavise od donijete odluke)
 - $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ - parametri stanja sistema- izražavaju neka svojstva sistema i predstavljaju ulazne podatke:

3. određivanje rješenja modela

- određivanje optimalnog ili njemu bliskog rješenja= određivanje vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, koje zadovoljavaju uslove ograničenja, a za koje funkcija cilja ima max ili min (zavisno od njene prirode)
 - analitičkim putem za jednostavnije probleme (primjena matematičkih operacija: algebra, diferencijalni i integralni račun)
 - numeričkim postupcima (najčešće iterativnim postupkom od pretpostavljenog početnog rješenja, dok se ne dobije optimalno)
- analiza osjetljivosti rješenja (odredi se optimalno rješenje za izabrane vrijednosti parametara μ_i , a zatim se utvđuje kako se ono mijenja sa promjenom parametara)

4. provjera modela i ocjena rješenja

- koristeći postojeće podatke koji se odnose na ranije ponašanje sistema provjerava se da li je model dobro koncipiran
- na osnovu posebnih probnih podataka predviđa se buduće ponašanje sistema

5. primjena rješenja u praksi i kontrola njihovog izvršenja- praćenje razlika između predloženog rješenja i stvarnih podataka. Uključen je tim koji je radio na rešavanju problema.

Metode operacionih istraživanja

1. Grupe problema koje se rešavaju operacionim istraživanjima:

- A. dobro matematički strukturirani problemi rešavaju se matematičkim metodama, ispunjavaju sljedeće:
 - može se formulirati matematički model,
 - model ima više dopustivih rešenja i sadrži funkcije kriterijuma na osnovu kojih se vrednuju rešenja,
 - postoji algoritam i matematička procedura za dobijanje rešenja
 - mogu se prikupiti sve informacije koje su neophodne za formulaciju modela
- B. slabo matematički strukturirani problemi (ne ispunjavaju gornje uslove), rešavaju se heurističkim i ekspertnim metodama

2. Matematičke metode-za formulaciju matematičkog modela i određivanje rešenja; karakteristike:

- strogost u formulaciji i egzaktnost u nalaženju rešenja
- za probleme čiji se uslovi ograničenja mogu precizno matematički definisati
- a) determinističke- vrijednosti svih parametara u modelu su determinističke veličine (određuju se sa potpunom vjerovatnoćom)
 - linearno programiranje (simpleks metoda, grafička metoda, transportni problem)
 - nelinearno programiranje
 - dinamičko programiranje,
 - cjelobrojno programiranje,
 - mrežno programiranje
- b) stohastičke- vrijednost bar jednog parametra se procjenjuje sa određenom vjerovatnoćom ili se ostvarenje uslova ograničenja procjenjuje sa vjerovatnoćom
 - a) stohastičko programiranje,
 - b) teorija slučajnih procesa,
 - c) teorija masovnog opsluživanja (redova čekanja)
 - d) teorija zaliha,
 - e) metode simulacije (Monte Karlo metode)
 - f) teorija pouzdanosti sistema i dr. (PERT)
- c) metode zasnovane na teoriji rasplinutih skupova

Metode operacionih istraživanja- nastavak

3. Heurističke metode se primjenjuju:

- ako imamo formulisan matematički model, koji je vrlo komplikovan pa se ne može riješiti analitičkim ili numeričkm postupcima
- ako ne možemo definisati matematički model, jer su promjenljive kvalitativne prirode
- postupak uz podršku računara:
 - proučavanje problema
 - formulisanje ciljeva na osnovu intuicije, kreativnosti, znanja i iskustva,
 - određuju se osnovna pravila- heuristike na osnovu kojih se definiše matematički model i traže rješenja
 - provjera rješenja, i ponavljanje prethodnog koraka i provjere rješenja

4. Ekspertne metode se primjenjuju:

- za matematički slabo strukturane probleme
- baziraju se na subjektivnim ocjenama mogućih rješenja od strane eksperata (Delfi metoda)

Linearno programiranje

- **najčešće primjenjivana metoda za tehničke, ekonomske, organizacione i dr. probleme**
- **u građevinarstvu se primjenjuje za**
 - organizaciju, ekonomiku i planiranje proizvodnje (izabrati proizvodni asortiman, kako bi se ostvario što veći profit)
 - određivanje sastava mješavina za proizvodnju betona, stabilizaciju tla i sl.
 - krojenje materijala (betonskog željeza, lima, građe) sa minimalnom količinom otpadaka
 - određivanje mehanizma loma i opterećenja loma konstruktivnih sistema u stanju granične ravnoteže....
- **Karakteristike:**
 - funkcija cilja linearna
 - uslovi ograničenja (nejednačine ili jednačine) linearni
- **Uslovi potrebni za primjenu linearnog programiranja**
 1. jasna formulacija cilja
 2. izabrati specifične uslove - ograničenja koja treba da su zasnovana na postojećim izvorima, planskim proporcijama i drugim faktorima koji određuju dozvoljena rešenja
 3. zadatak treba da dozvoli dobijanje niza rešenja i izbor optimalnog za date uslove
 4. model zadatka linearnog programiranja treba da sadrži isključivo linearne jednačine

Opšta formulacija zadaka linearnog programiranja

1. funkcija cilja (linearna funkcija):

$$\max \text{ (ili min) } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

gdje su:

c_i - troškovi, realni brojevi, za $i=1,2,\dots,n$

x_i - promjenljive koje treba odrediti, za $i=1,2,\dots,n$

2. sistem ograničenja (ukupno m ograničenja)

- k ograničenja sa znakom „ $\leq$ “

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i=1,2,\dots,k)$$

- p ograničenja sa znakom „ $\geq$ “

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad (i=k+1, k+2, \dots, k+p)$$

- $m-p-k$ ograničenja sa znakom „ $=$ “

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i=k+p+1, k+p+2, \dots, m),$$

gdje su:

a_{ir}, a_{jr}, a_{kr} realni brojevi, za $r=1,2,\dots,n$

b_i, b_j, b_k **pozitivni** realni brojevi

3. uslov nenegativnosti

$$x_i \geq 0$$

Matrični oblik zadatka linearnog programiranja

1. funkcija cilja: $\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
2. sistem ograničenja $\mathbf{Ax} \leq, = \geq \mathbf{b}$
3. uslov nenegativnosti $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{b} \geq 0$,
gdje su vektori i matrica:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ vektor troškova resursa,} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ vektor zahtjeva (ograničenja)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ matrica koeficijenata}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ vektor rješenja problema, ako zadovoljava sistem ograničenja, a ako}$$

zadovoljava i uslov nenegativnosti onda ovaj vektor predstavlja i dopustivo rješenje

Dopustivo i optimalno rješenje, interpretacija u n-dimenzionalnom prostoru

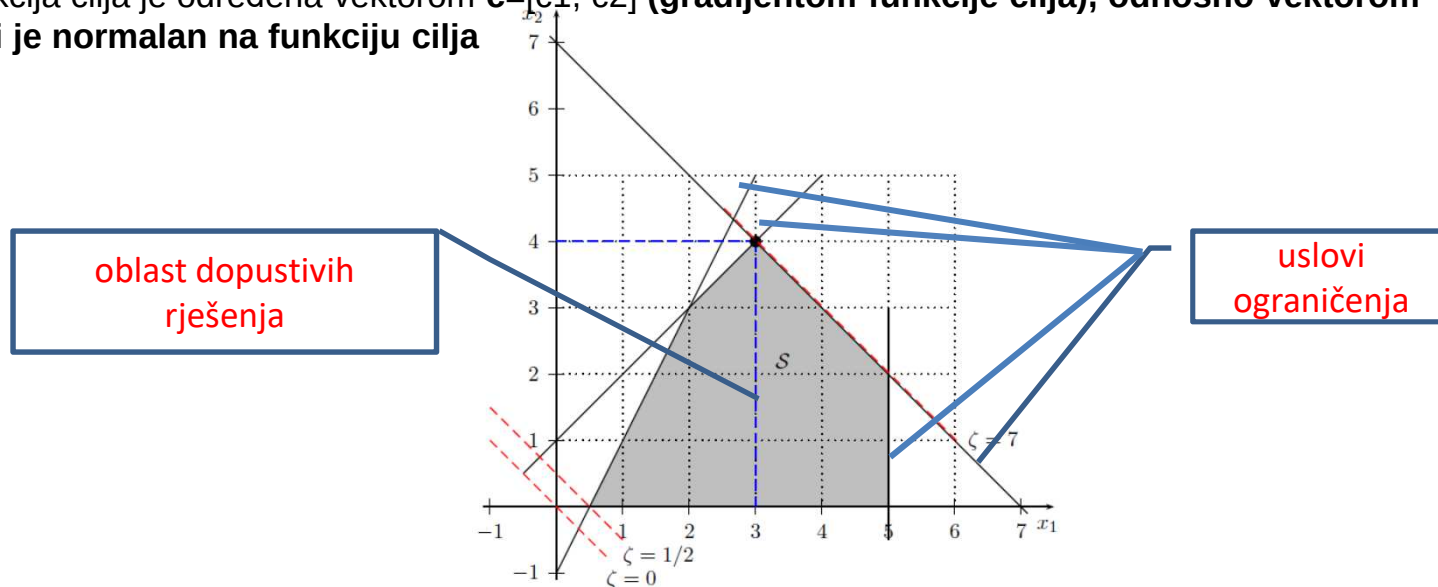
- Ako je:
 - x -rješenje problema (zadovoljava uslove ograničenja)
 - x^* dopustivo rješenje koje zadovoljava uslove ograničenja i uslove nenegativnosti
 - cx^* ima konačnu vrijednost, tako da:
$$cx^* \leq (\geq) cx,$$
tada je x^* - **optimalno rješenje** problema određivanja minimuma (maksimuma) funkcije cilja
- komponente vektora x predstavljaju koordinate neke tačke u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru, a vektor x je njen vektor položaja (određuje koordinate tačke u n-dimenzionalnom prostoru)
- ograničenja sa znakom $\leq$ ili $\geq$ određuju po jedan poluprostor
 - ako je dvodimenzionalni prostor (u slučaju kad treba odrediti samo 2 promjenljive) onda ova ograničenja definišu poluravni
 - u slučaju trodimenzionalnog prostora (u slučaju kad treba odrediti 3 promjenljive), ova ograničenja predstavljaju poluprostore
- ograničenja sa znakom $=$ određuju po jednu hiperravan
 - ako je dvodimenzionalni prostor onda ovakva ograničenja definišu prave u dvodimenzionalnom prostoru
 - u slučaju trodimenzionalnog prostora, ovakva ograničenja predstavljaju ravni u trodimenzionalnom prostoru
- Može se pokazati da je:
 $\min z = - \max(-z)$, pa se određivanje minimuma može tretirati, kao određivanje maksimuma funkcije **$-z$**

Grafički prikaz i grafičko rješavanje linearnog programiranja

- primjenjiv za dvodimenzionalni (jednostavan za crtanje) i trodimenzionalni problem (komplikovanije za crtanje)
- Postupak rješavanja za dvodimenzionalni problem:
 - formulisanje matematičkog modela: razmotriti i formulisati uslove proizvodnje, ograničenja i funkciju cilja
 - rješavanje grafičkim putem – crtanjem u I kvadrantu pravouglog koordinatnog sistema
 - nacrtaju se prave definisane jednačinama koje se dobijaju iz uslova ograničenja zamjenom znakova nejednakosti znakom jednakosti

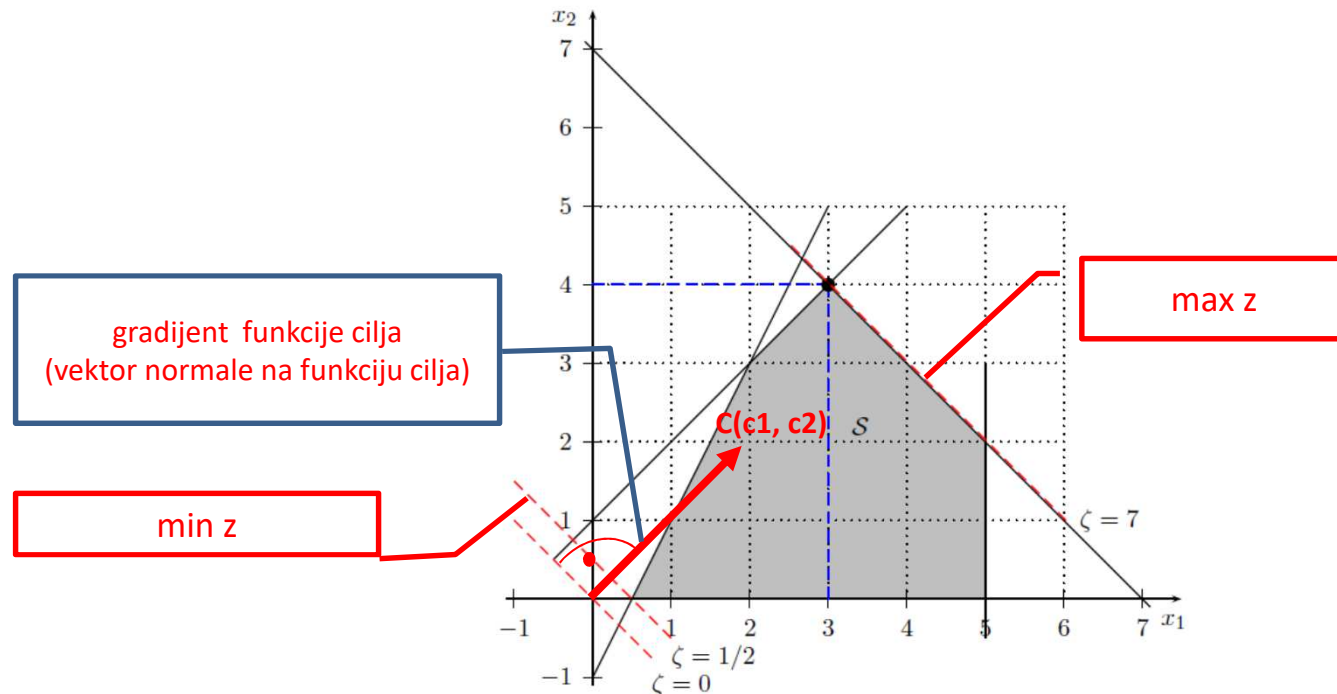
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i, \text{ postaju } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

- određujemo oblast dopustivih rješenja kao presjek poluravni definisanih uslovima ograničenja (u prvom kvadrantu)
- funkcija cilja je određena vektorom $\mathbf{c}=[c_1, c_2]$ (gradijentom funkcije cilja), odnosno vektorom koji je normalan na funkciju cilja



Grafički prikaz i grafičko rješavanje linearnog programiranja

- nacrtana se prava $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ i pomjera se paralelno samoj sebi duž vektora normale na funkciju cilja do najudaljenije tačke na konturi skupa dopustivih tačaka)
- određuje se ona tačka u oblasti dopustivih rješenja za koju funkcija cilja ima maksimalnu (ili minimalnu) vrijednost. Koordinate te tačke (očitaju se sa crteža) predstavljaju optimalno rješenje. U toj tački se može povući prava normalna na gradijent funkcije cilja, tako da se sve tačke oblasti dopustivih rješenja nalaze sa jedne strane te prave:
 - to je tačka maksimuma – ako je što dalja od koordinatnog početka
 - tačka minimuma – najbliža koordinatnom početku



Primjer 1: U jednom pogonu se proizvode dvije vrste proizvoda (P1 i P2) na mašinama (M1 i M2). Vrijeme obrade proizvoda P1 na mašini M1 iznosi 2 minuta, a vrijeme obrade proizvoda P1 na mašini M2 iznosi 7 minuta u jednom ciklusu. Proizvod P2 se obrađuje na mašini M1 5 minuta, a na mašini M2 2 minuta u jednom ciklusu. Tehnološki je uslovljeno trajanje ciklusa na mašini M1 do 10 minuta, a na mašini M2 do 14 minuta. Odrediti plan proizvodnje koji će donijeti najveći profit, ako proizvod P1 donosi profit od 3 n.j./kom, a proizvod P2 7 n.j./kom.

Rješenje:

1. funkcija cilja: $\max z = 3x_1 + 7x_2$ gdje je x_1 i x_2 broj komada proizvoda P1, odnosno P2
2. uslovi ograničenja:

	P1 (ai1)	P2(ai2)	bi
M1	2	5	10
M2	7	2	14

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

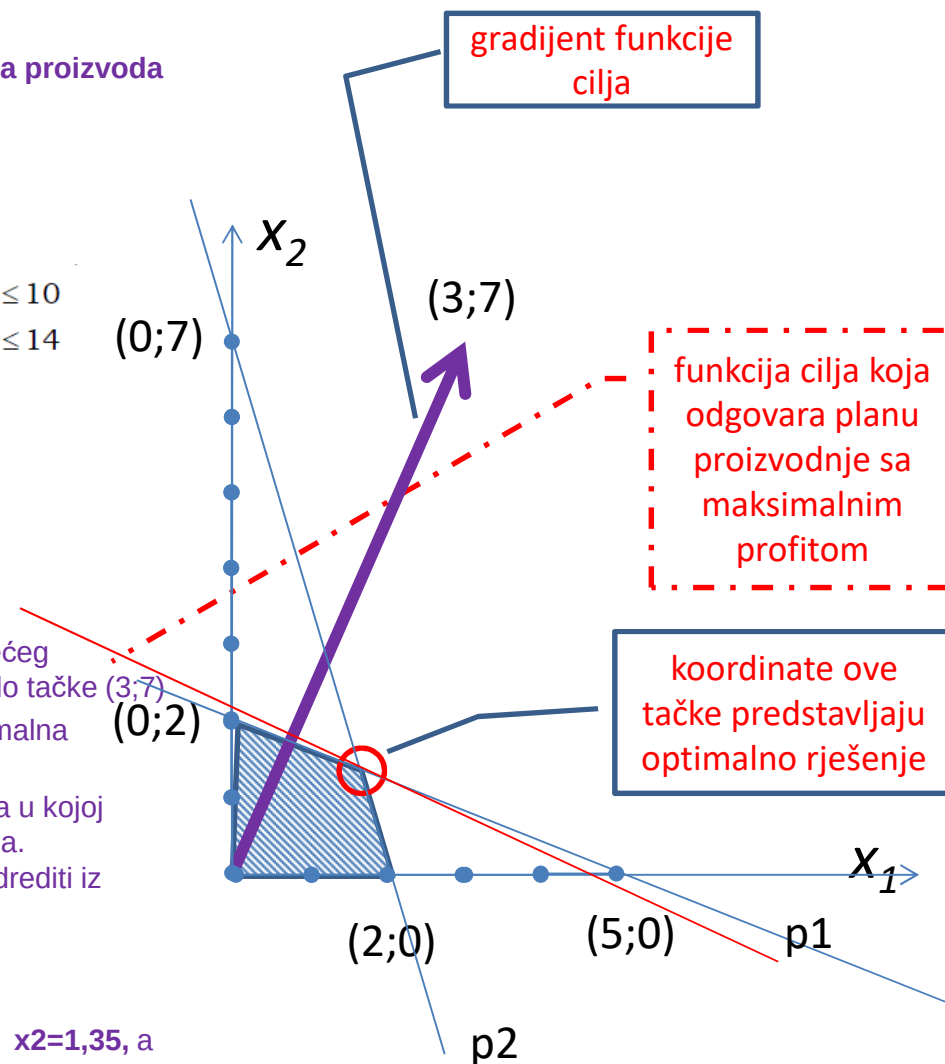
$$7x_1 + 2x_2 \leq 14$$

3. uslovi nenegativnosti: $x_1, x_2 \geq 0$

- postupak:
 - uslovi ograničenja definišu prave koje treba nacrtati:
 - p1: $2x_1 + 5x_2 = 10$ (prolazi kroz tačke (5;0) i (0;2))
 - p2: $7x_1 + 2x_2 = 14$ (prolazi kroz tačke (2;0) i (0;7))
 - šrafira se oblast dopustivih rješenja
 - nacrt se gradijent funkcije cilja (pravac njenog najvećeg prirasta): povlači se prava od koordinatnog početka do tačke (3;7)
 - tačke po obodu šrafirane oblasti su kandidati za optimalna rješenja
 - tačka koja je najudaljenija od koordinatnog početka, a u kojoj funkcija cilja „tangira“ datu oblast je tačka maksimuma. Koordinate se mogu očitati sa crteža, ali se mogu i odrediti iz presjeka pravih:

$$2x_1 + 5x_2 = 10 \text{ i } 7x_1 + 2x_2 = 14.$$
 - Odavde je optimalni plan proizvodnje: $x_1 = 1,61$ i $x_2 = 1,35$, a maksimalni profit koji se ostvaue je

$$\max z = 3 \cdot 1,61 + 7 \cdot 1,35 = 14,28$$



Literatura

- Ž. Praščević, N. Praščević: Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Čugura print, Beograd, 2009,
- On line program za resavanje
<http://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en>